TÀI LIỆU ÔN THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA





KỸ THUẬT XỬ LÝ
HÌNH HỌC TỌA ĐỘ PHẲNG

PHẦN I: GÁN ĐỘ DÀI CHO HÌNH VẼ
PHẦN II: GỌI ẨN TRÊN ĐƯỜNG THẲNG
PHẦN III: GIẢI TAM GIÁC TỨ GIÁC
PHẦN IV: GIẢI ĐƯỜNG TRÒN

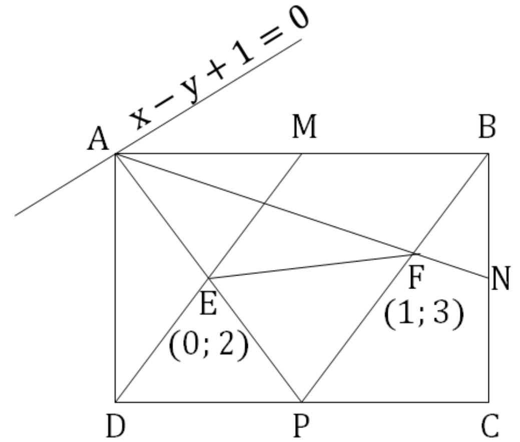
Biên soạn: **ĐOÀN TRÍ DŨNG**
Hotline: **0902.920.389**
Facebook: **https://www.facebook.com/toanthaydung**

DON'T LET DREAMS JUST BE DREAMS

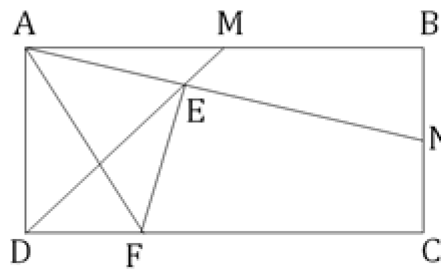
PHẦN I: PHƯƠNG PHÁP GÁN ĐỘ DÀI

Mục tiêu của phương pháp gán độ dài là xây dựng mối liên hệ giữa những cái đã có và những cái chưa có.
Chẳng hạn như trong hình vẽ bên thì chúng ta thấy rằng cái đã có là độ dài EF còn cái chưa có là độ dài EA. Nếu ta tính được độ dài EA thì vấn đề đã trở nên đơn giản hơn. Tuy nhiên thực tế cái khó nhất chính là ở chỗ này.
Để tính EA thì ta không nên suy nghĩ quá đơn giản là đi tính độ dài một cách trực tiếp. Thực tế đã là hình học thì không thể cứ tính trực tiếp mà ra được. Ta sẽ tính EA thông qua các bước sau:

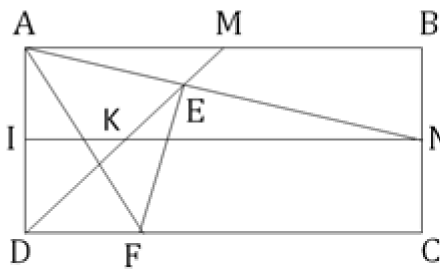
- Bước 1: Đặt một độ dài của hình vẽ là a (có thể là cạnh hình vuông, cạnh hình chữ nhật, chẳng hạn đặt AB = a).
- Bước 2: Tính độ dài EA và EF theo a (chẳng hạn EA = 2a, EF = a$\sqrt{2}$)
- Bước 3: Độ dài EF thực tế là $\sqrt{2}$ như vậy a = 1, do đó độ dài EA = 2. Từ đây thì việc tìm ra A là quá đơn giản.



<u>VẤN ĐỀ 1: GÁN MỘT ĐỘ DÀI BẰNG TÍNH CHẤT HÌNH VẼ:</u> Hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD và $A(1;3)$. M và N là trung điểm của AB và BC. DM cắt AN tại $E\left(\frac{13}{5};\frac{13}{5}\right)$. F là điểm nằm trên đoạn thẳng CD sao cho 10DF = 3CD. Biết rằng điểm F nằm trên đường thẳng $d: 11x+5y-16=0$. Xác định tọa độ đỉnh F.



Hình 1



Hình 2

Bài toán này có một mối quan hệ rất dễ nhìn thấy đó chính là mối quan hệ vuông góc giữa A, E và F. Trong bài toán này tôi sẽ sử dụng kỹ thuật gán độ dài để chứng minh mối quan hệ đó bằng Pithagore.

Các vấn đề tìm nốt ra các điểm còn lại để hoàn thiện bài toán, học sinh tự xử lý nốt.

Đặt độ dài cạnh AD = a, AB = 2a, gọi I là trung điểm của AD và K là trung điểm của DM. Ta dễ dàng thấy được các điểm I, K, N thẳng hàng. Ta có $IK=\frac{AM}{2}=\frac{a}{2}\Rightarrow KN=\frac{3a}{2}$. Mặt khác theo định lý Thales ta có:

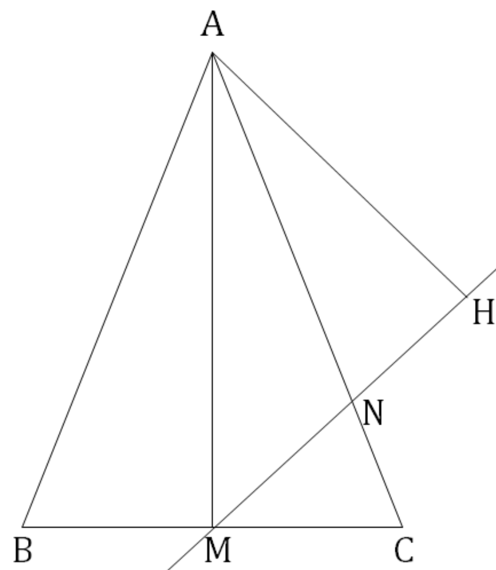
$$\frac{ME}{EK}=\frac{AE}{EN}=\frac{AM}{NK}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AE}{AN}=\frac{ME}{MK}=\frac{2}{5}\Rightarrow AE=\frac{2}{5}AN=\frac{a\sqrt{17}}{5}, ME=\frac{2}{5}MK=\frac{a\sqrt{2}}{5}\Rightarrow DE=\frac{4a\sqrt{2}}{5}$$

Ta dễ dàng nhận thấy $\widehat{ADM}=\widehat{MDF}=45^0$ nên áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác DEF ta được:

$FE^2=DE^2+DF^2-2DE.DF.\cos 45^0\Rightarrow FE=\frac{a\sqrt{17}}{5}$. Xét tam giác ADF ta được:

$FA^2=AD^2+DF^2=\frac{34a^2}{25}=AE^2+FE^2$. Vậy tam giác AEF vuông cân tại E. Do đó ta tìm được điểm $F\left(\frac{11}{5};1\right)$

VẤN ĐỀ 2: GÁN MỘT ĐỘ DÀI DỰA VÀO THÔNG SỐ ĐẦU BÀI: Tam giác ABC cân tại $A(2;4)$ có diện tích bằng 3. Gọi M là trung điểm của BC và $N\left(\frac{11}{4};\frac{7}{4}\right)$ là điểm nằm trên cạnh AC sao cho AC = 4CN. Biết rằng đường thẳng MN có phương trình $x-y-1=0$. Xác định tọa độ đỉnh M.



Nhìn qua thì bài toán này không thể gán được độ dài, tuy nhiên nếu để ý kỹ thì từ chi tiết diện tích bằng 3, ta đặt AM = a, ta sẽ có BC = $\frac{6}{a}$. Do vậy mục tiêu của chúng ta trong bài toán này là tính được AN theo a. Ta có:

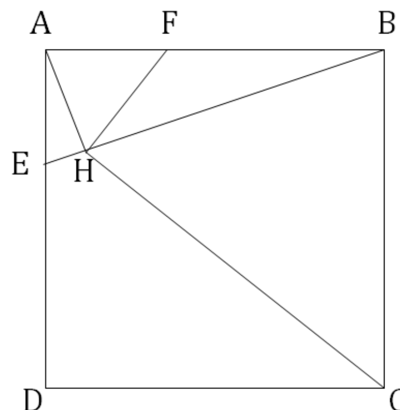
$$AC=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{a^2+\frac{9}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^4+9}}{a}\Rightarrow AN=\frac{3\sqrt{a^4+9}}{4a}$$

Mặt khác vì $A(2;4)$ và $N\left(\frac{11}{4};\frac{7}{4}\right)$ nên $AN=\frac{3\sqrt{10}}{4}$. Như vậy:

$$\frac{3\sqrt{a^4+9}}{4a}=\frac{3\sqrt{10}}{4}\Rightarrow a=AM=1\vee a=AM=3$$

Từ đây việc tìm điểm M đã trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Học sinh tự giải quyết nốt bài toán đến khi kết thúc.

VẤN ĐỀ 3: GÁN HAI ĐỘ DÀI CHO HAI CẠNH KHÁC NHAU: Hình vuông ABCD. Trên các cạnh AD, AB lần lượt lấy E và F sao cho AE = AF. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BE. Tìm tọa độ đỉnh C biết C thuộc đường thẳng $x-2y+1=0$ và hai điểm $F(2;0)$, $H(1;-1)$.



Trước hết ta tìm hiểu về cách chứng minh bằng hình học thuần túy:

Ta có $\widehat{HAF}=\widehat{AEH}=\widehat{HBC}$ và $\frac{AH}{FA}=\frac{AH}{AE}=\frac{BH}{BA}=\frac{BH}{BC}$ nên ta có hai tam giác đồng dạng HAF và HBC nên $\widehat{AHF}=\widehat{BHC}$.

Vì $\widehat{AHF}+\widehat{FHB}=90^0$ nên $\widehat{BHC}+\widehat{FHB}=90^0$ hay CH ⊥ HF do đó ta tìm được tọa độ điểm $C\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Tuy nhiên vấn đề khó nhất là tỷ số $\frac{AH}{FA}=\frac{AH}{AE}=\frac{BH}{BA}=\frac{BH}{BC}$ làm thế nào xử lý tốt được.

Gán độ dài có giải quyết được tỷ số trên không khi mà E và F đều là hai điểm bất kỳ trên AD và AB?

Câu trả lời là CÓ. Nếu ta đặt AB = a, AE = AF = b thì khi đó với mục tiêu hai tam giác HAF và HBC đồng dạng, ta tập trung vào độ dài các cạnh AH, FA, BH, BC.

Tính AH: $AH=\frac{AE.AB}{\sqrt{AE^2+AB^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Do đó: $\frac{AH}{FA}=\frac{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{b}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Tính BH: $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^4}{a^2+b^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Do đó: $\frac{BH}{BC}=\frac{\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}{a}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

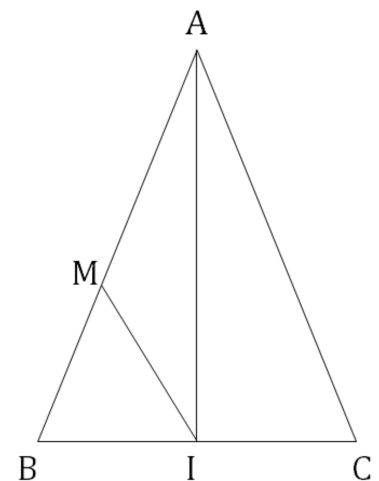
Khi đó: $\frac{AH}{FA}=\frac{BH}{BC}$ nên các tam giác HAF và HBC đồng dạng. Do đó ta tìm được C.

PHẦN II: PHƯƠNG PHÁP GỌI ẨN TRÊN ĐƯỜNG THẲNG

Giống như phương pháp bình phương trong phương trình – hệ phương trình, phương pháp gọi ẩn trên đường thẳng là phương pháp đơn giản nhất, dễ hiểu dễ làm, chỉ có tính là hơi khó, đòi hỏi học sinh phải có kỹ năng tính toán tốt và tuân thủ theo các nguyên tắc như sau:

- Mỗi một điểm trên đường thẳng có thể gọi tham số trên đường thẳng đó.
- Hai điểm khác nhau phải gọi hai tham số khác nhau.
- Thường chỉ sử dụng khi bài toán xuất hiện hai đường thẳng trở lên.
- Gọi tối đa 2 ẩn, hạn chế tối đa gọi đến ẩn thứ 3.
- Có bao nhiêu ẩn phải đưa ra bấy nhiêu phương trình.

VẤN ĐỀ 1: GỌI MỘT ẨN VÀ TÍNH TỌA ĐỘ CÁC ẨN KHÁC BẰNG CÁCH KÉO THEO: Tam giác ABC cân tại A có phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là: $2x-y+3=0$ và $I\left(-2;-1\right)$ là trung điểm của BC. Điểm $M\left(4;1\right)$ nằm trên cạnh AB và tam giác ABC có diện tích bằng 90. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng điểm B có hoành độ lớn hơn 3.



Thiết lập mục tiêu cho bài toán:

- Bước 1: Gọi tọa độ của B tham số b trên đường thẳng BC.
- Bước 2: Tìm tọa độ của C theo tham số b.
- Bước 3: Từ B và M viết phương trình BM theo tham số b.
- Bước 4: Viết được phương trình AI qua I vuông góc với BC.
- Bước 5: Tìm được tọa độ A theo tham số b là giao của BM và AI.
- Bước 6: Giải phương trình diện tích tam giác ABC bằng 90 ra b.
- Bước 7: Kết luận.

Thực hiện:

Bước 1: Gọi $B\left(b;2b+3\right)$ trên đường thẳng BC.

Bước 2: I trung điểm BC: $\begin{cases} x_C=2x_I-x_B=-4-b \\ y_C=2y_I-y_B=-5-2b \end{cases} \Rightarrow C\left(-4-b,-5-2b\right)$

Bước 3: Từ B và M đã có ta viết phương trình đường thẳng BM: $\left(2b+2\right)\left(x-4\right)+\left(4-b\right)\left(y-1\right)=0$

Bước 4: Đường thẳng qua I và vuông góc với BC là AI: $x+2y+4=0$

Bước 5: A là giao của BM và AI nên tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \left(2b+2\right)\left(x-4\right)+\left(4-b\right)\left(y-1\right)=0 \\ x+2y+4=0 \end{cases}$ do đó ta tìm được tọa độ $A\left(\frac{2b+8}{b};\frac{-3b-4}{b}\right)$.

Bước 6: Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AI.BC=\frac{1}{2}\sqrt{\left(2b+4\right)^2+\left(4b+8\right)^2}\sqrt{\left(\frac{4b+8}{b}\right)^2+\left(\frac{2b+4}{b}\right)^2}=\frac{10\left(b+2\right)^2}{\left|b\right|}=90$. Do đó giải phương trình trên ta được $b=1,b=4,b=\frac{-13\pm3\sqrt{17}}{2}$.

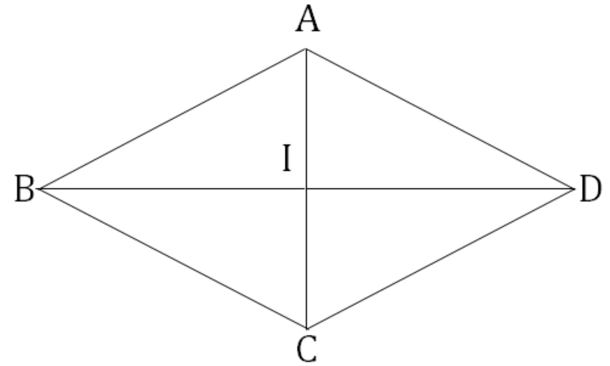
Bước 7: Do điểm B có hoành độ lớn hơn 3 nên ta tìm được $A\left(4;-4\right)$, $B\left(4;11\right)$, $C\left(-8;-13\right)$.

VẤN ĐỀ 2: GỌI HAI ẨN PHỤ, ĐƯA VỀ HỆ 2 PHƯƠNG TRÌNH BẰNG 2 DỮ KIỆN ĐẦU BÀI:

Hình thoi ABCD có phương trình đường chéo AC: $x+7y-31=0$. Hai đỉnh B và D nằm trên các đường thẳng $x+y-8=0$ và $x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD biết nó có diện tích bằng 75 và đỉnh A có hoành độ không âm.

Thiết lập mục tiêu bài toán:

- Bước 1: Gọi B và D tham số trên hai đường thẳng cho trước. Ta cần thiết lập hai phương trình để tìm ra hai điểm B và D.
- Bước 2: Phương trình 1: ABCD là hình thoi nên trung điểm của BD nằm trên đường thẳng AC.
- Bước 3: Phương trình 2: ABCD là hình thoi nên hai đường chéo BD và AC vuông góc nhau.
- Bước 4: Thiết lập hệ phương trình tìm ra B và D, sau đó dùng dữ kiện diện tích để tìm ra A và C.



Bước 1: Gọi $B(b;8-b)$ và $D(2d-3;d)$ trên hai đường thẳng $x+y-8=0$ và $x-2y+3=0$.

Bước 2: Gọi $I\left(\dfrac{b+2d-3}{2};\dfrac{-b+d+8}{2}\right)$ là trung điểm của BD. Ta có I thuộc AC nên:

$$\frac{b+2d-3}{2}+7\frac{-b+d+8}{2}-31=0\Rightarrow -6b+9d-9=0$$

Bước 3: BD vuông góc với AC nên $\overrightarrow{BD}\overrightarrow{u_{AC}}=0\Rightarrow -8b+13d-13=0$

Bước 4: Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-6b+9d-9=0\\-8b+13d-13=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B(0;8)\\D(-1;1)\end{cases}\Rightarrow BD=5\sqrt{2},I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$

Ta có $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC.BD=IA.5\sqrt{2}=75\Rightarrow AI=\dfrac{15}{\sqrt{2}}$. Do đó gọi $A(-7a+31;a)$ trên AC, ta được:

$$IA^2=\frac{225}{2}=\left(-7a+31+\frac{1}{2}\right)^2+\left(a-\frac{9}{2}\right)^2\Rightarrow A(-11;6)\vee A(0;3)$$

Vì A có hoành độ không âm nên ta có $A(0;3)$, $C(-11;6)$

PHẦN III: GIẢI TAM GIÁC – TỨ GIÁC

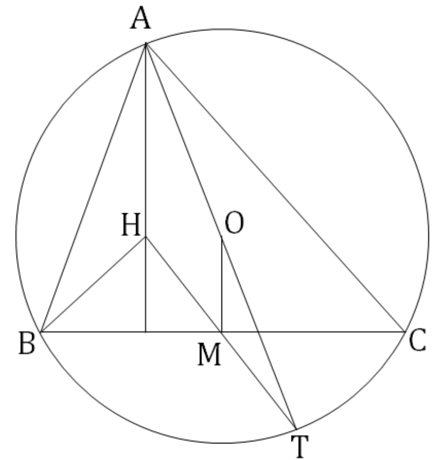
I. TÍNH CHẤT TRỰC TÂM TRONG TAM GIÁC

Ký hiệu trong các hình vẽ:

O: tâm ngoại tiếp.
M, N, P: Trung điểm BC, CA, AB.
AD, BE, CF: 3 đường cao
G: Trọng tâm.
H: Trực tâm.
W: Tâm đường tròn Euler.
J, K, L: Trung điểm HA, HB, HC.
T: Điểm đối xứng với A qua O.
R: Điểm đối xứng với H qua BC.

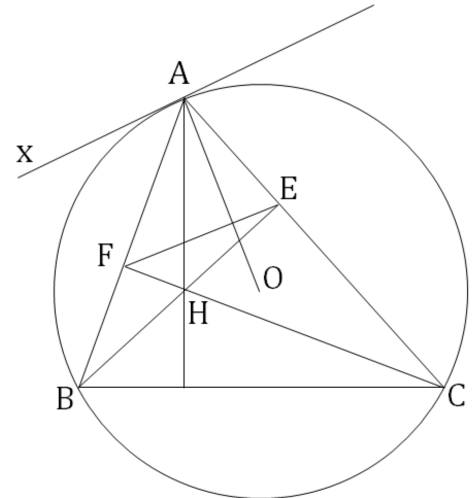
1. QUAN HỆ 1: A, H, O, M

B và C nằm trên đường tròn đường kính AT nên BT⊥BA, CT⊥CA.
Vì BH⊥CA, CH⊥BA
Do đó ta có BHCT là hình bình hành.
Vậy M là trung điểm của HT.
OM là đường trung bình của tam giác AHT.
Vậy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$



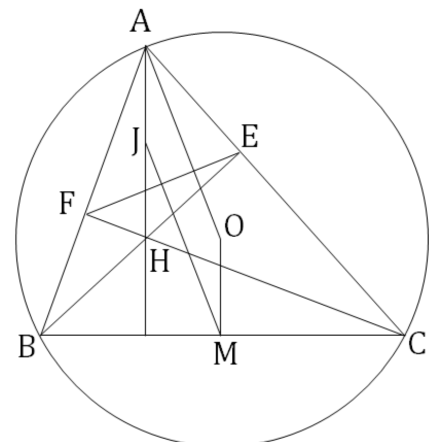
2. QUAN HỆ 2: QUAN HỆ O, A, F, E VỚI TIẾP TUYẾN TẠI A

Gọi Ax là tiếp tuyến tại A, ta có OA⊥Ax.
$\widehat{xAF} = \widehat{ACB}$ (Góc giữa tiếp tuyến và dây cung)
Tứ giác BFEC nội tiếp nên $\widehat{ACB} = \widehat{AFE}$
Vậy $\widehat{AFE} = \widehat{xAF}$.
Do đó Ax//EF.
Vậy EF⊥OA.

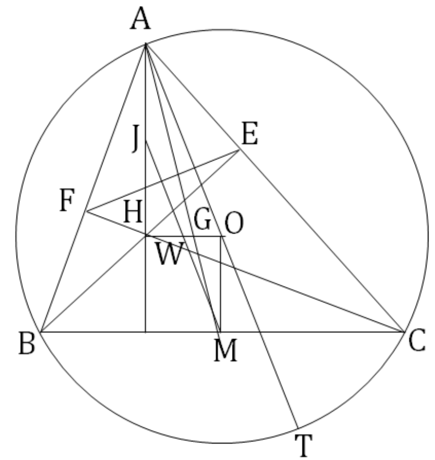


3. QUAN HỆ 3: J, M, E, F, O, A

Vì AH//OM và AH = 2OM nên JA//OM và JA = OM.
Do đó JAOM là hình bình hành.
Vậy OA//JM.
Vì EF⊥OA.
Vậy EF⊥JM.



4. MỐI QUAN HỆ 4: W, O, H, G.



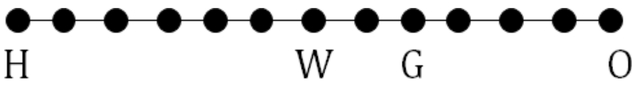
Quan hệ O, H, W:

Vì AH//OM và AH = 2OM nên JH//OM và JH = OM.
Do đó JOMH là hình bình hành.
Do đó JM cắt OH tại trung điểm W của mỗi đường.
Tương tự ta chứng minh được KN, LP đều cắt OH tại trung điểm của mỗi đường (Học sinh tự vẽ nốt hình).
Do đó 4 đường JM, KN, LP, OH đồng quy tại trung điểm mỗi đường đó là W (Tâm đường tròn Euler).
Vậy tâm đường tròn Euler W là trung điểm các đoạn OH, JM, KN, LP

Quan hệ O, H, G:

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có $\frac{AG}{AM}=\frac{2}{3}$. Vì AM cũng là trung tuyến của tam giác AHT nên G là trọng tâm tam giác AHT.
Vì HO là trung tuyến tam giác AHT nên OH = 3OG.

Thứ tự các điểm O, H, G, W để thiết lập tỷ số vector khi cần:

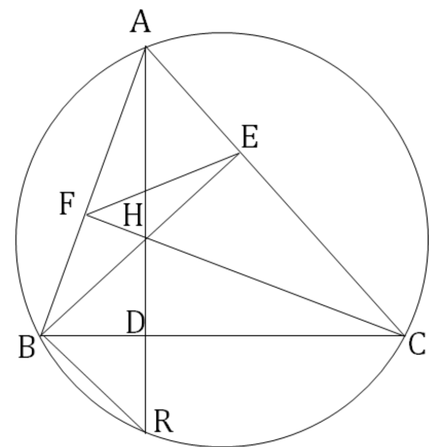


(Chia đoạn OH là 12 đoạn, OG chiếm 3 đoạn, W chiếm 6 đoạn)

Các loại đường tròn sau là đường tròn Euler:

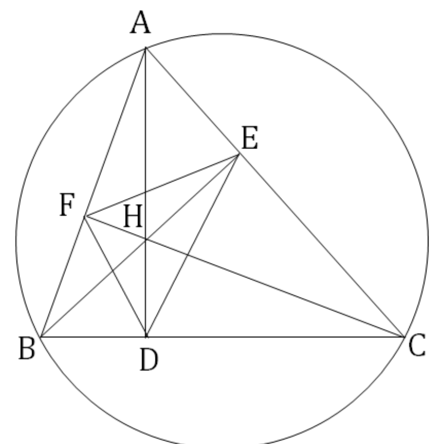
- Đường tròn đi qua 3 chân đường cao trong tam giác.
- Đường tròn đi qua 3 trung điểm 3 cạnh trong tam giác.
- Đường tròn đi qua 3 trung điểm đoạn nối giữa đỉnh và trực tâm của tam giác.

5. MỐI QUAN HỆ 5: H, D, R



Ta chứng minh khi R đối xứng với H qua BC thì R nằm trên (O):
$\widehat{HBC}=\widehat{RBC}$ (H và R đối xứng qua BC)
Tứ giác AEDB nội tiếp nên $\widehat{HBC}=\widehat{RAC}$
Do đó $\widehat{RBC}=\widehat{RAC}$.
Vậy tứ giác ABRC nội tiếp.
Do đó R nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABRC cũng là đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C.
Vậy R nằm trên (O).

6. MỐI QUAN HỆ 6: D, E, F, H

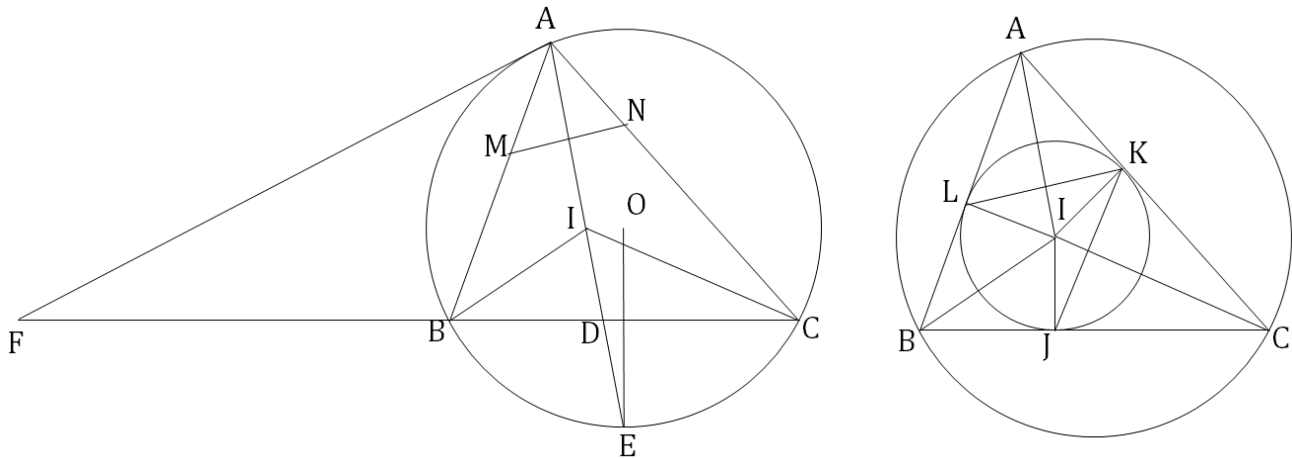


Tứ giác AFHE nội tiếp nên $\widehat{FEH}=\widehat{FAH}$
Tứ giác HDCE nội tiếp nên $\widehat{DEH}=\widehat{DCH}$
Tứ giác AFDC nội tiếp nên $\widehat{FAH}=\widehat{DCH}$
Vậy ta có $\widehat{FEH}=\widehat{DEH}$.
Do đó EH là phân giác trong góc $\widehat{FED}$.
Tương tự cho DH và FH.
Vậy H là giao điểm 3 đường phân giác và cũng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.
Chú ý: $\widehat{BHC}=180^0-\widehat{BAC}$

II. TÍNH CHẤT TÂM ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP, PHÂN GIÁC TRONG, PHÂN GIÁC NGOÀI

Ký hiệu trong các hình vẽ:

- AD: Phân giác trong góc A.
- E: Giao điểm của AD và đường tròn ngoại tiếp.
- O, I: Tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.
- F: Giao điểm của tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp và đường thẳng BC kéo dài.
- M: Điểm bất kỳ trên AB.
- N: Điểm đối xứng của M qua phân giác AD.
- J, K, L: Điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp với các cạnh tam giác



1. MỐI QUAN HỆ 7: ĐỊNH LÝ THALES VÀ CÁCH XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM D

Theo định lý Thales cho đường phân giác ta có: $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}\Rightarrow \overrightarrow{BD}=-\frac{AB}{AC}\overrightarrow{CD}$. Có 3 loại đường phân giác:

- Phân giác tạo bởi $\begin{cases} d_1: a_1x+b_1y+c_1=0 \\ d_2: a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}: \frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$
- Phân giác trong của tam giác ABC: Xác định tọa độ điểm D qua hệ thức: $\overrightarrow{BD}=-\frac{AB}{AC}\overrightarrow{CD}$. Khi đó phân giác trong là đường thẳng đi qua 2 điểm A và D.
- Phân giác ngoài của tam giác ABC: Đường thẳng qua A và nhận $\overrightarrow{AD}$ là vector pháp tuyến.

2. MỐI QUAN HỆ 8: TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Gọi M là điểm bất kỳ trên AB, N là điểm đối xứng với M qua AD. Ta có $\widehat{MAD}=\widehat{NAD}$ nên N nằm trên AC.

Vậy nếu bài toán cho trước tọa độ 1 điểm M nằm trên AB, cho tọa độ đỉnh C, cho phương trình phân giác AB, ta có thể lấy đối xứng của M qua AD là N. Khi đó đường thẳng AC là đường thẳng đi qua C và N.

3. MỐI QUAN HỆ 9: MỐI QUAN HỆ O, E, B, C

$\widehat{DAB}=\widehat{DAC}$ nên cung EB và EC bằng nhau do đó EB = EC. Mà OB = OC nên OE là trung trực của BC.

Hệ quả: $\overrightarrow{OE}$ là vector pháp tuyến của đường thẳng BC.

4. MỐI QUAN HỆ 10: MỐI QUAN HỆ I, B, E, C

$\widehat{EBI}=\widehat{EBC}+\widehat{CBI}=\widehat{EAC}+\widehat{IBA}=\widehat{EAB}+\widehat{IBA}=\widehat{EIB}$. Vậy EI = EB. Tương tự ta có EC = EI.

Hệ quả: B, C là giao điểm của đường tròn tâm E, bán kính EI với đường tròn (O).

5. MỐI QUAN HỆ 11: MỐI QUAN HỆ F, A, D

$\widehat{FAD} = \widehat{FAB} + \widehat{BAD} = \widehat{BCA} + \widehat{DAC} = \widehat{FDA}$. Vậy FA = FD.

Hệ quả: F là giao điểm của trung trực đoạn AD với đường thẳng BC.

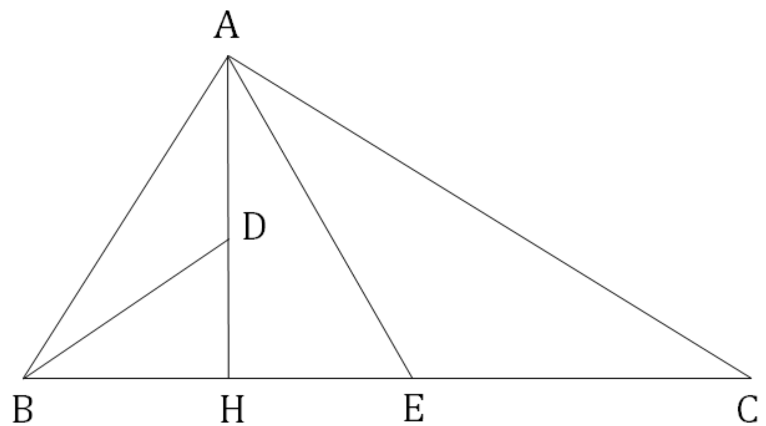
6. MỐI QUAN HỆ 12: QUAN HỆ GÓC TRONG ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Góc ở tâm nội tiếp và góc ở đỉnh: $BIC = 180^0 - \dfrac{ABC + ACB}{2} = 90^0 + \dfrac{BAC}{2} \Rightarrow BIC = 90^0 + \dfrac{BAC}{2}$

Góc ở điểm tiếp xúc và góc ở đỉnh:

$$JKL = JKI + LKI = JCI + LAI = \frac{BAC + BCA}{2} = 90^0 - \frac{ABC}{2} \Rightarrow JKL = 90^0 - \frac{ABC}{2}$$

III. TÍNH CHẤT TAM GIÁC VUÔNG CHIA ĐÔI VÀ HỆ QUẢ:

Xét tam giác ABC vuông tại A đường cao AH, D và E là hai điểm trên AH và CH.	

7. MỐI QUAN HỆ 13: QUAN HỆ BD VÀ AE LÀ HAI ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

Nếu D và E là trung điểm AH và CH thì DE là đường trung bình tam giác AHC. Do đó DE//AC nên DE⊥AB.

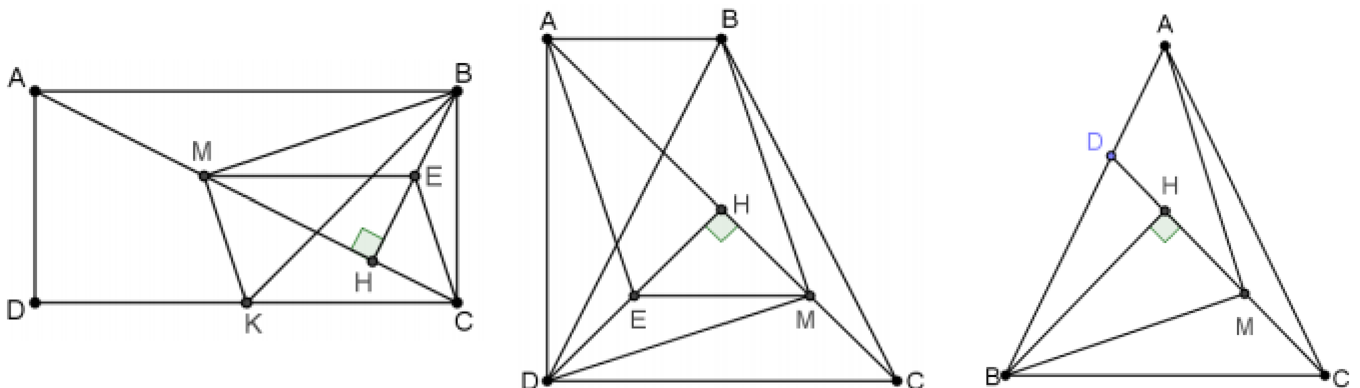
Mặt khác AD⊥BE nên D là trực tâm tam giác ABE do đó BD⊥AE.

8. MỐI QUAN HỆ 14: QUAN HỆ BD VÀ AE LÀ HAI ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG

Nếu BD và AE là hai phân giác trong thì: $\dfrac{DH}{AD} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{HE}{EC}$ do đó DE//AC nên DE⊥AB.

Mặt khác AD⊥BE nên D là trực tâm tam giác ABE do đó BD⊥AE.

Một số hệ quả của bài toán tam giác vuông chia đôi:



PHẦN IV: GIẢI ĐƯỜNG TRÒN

9. MỐI QUAN HỆ 15: TƯƠNG GIAO HAI ĐƯỜNG TRÒN

$(C_1):(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R_1^2,(C_2):(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=R_2^2$

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài: $$\overrightarrow{IA}=-\frac{R}{R'}\overrightarrow{I'A}$$ Phương trình trục đẳng phương (Đường thẳng qua A và vuông góc với II': $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-(x-a_2)^2-(y-b_2)^2=R_1^2-R_2^2$	I A I'
Hai đường tròn tiếp xúc trong: $$\overrightarrow{IA}=\frac{R}{R'}\overrightarrow{I'A}$$ Phương trình trục đẳng phương (Đường thẳng qua A và vuông góc với II': $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-(x-a_2)^2-(y-b_2)^2=R_1^2-R_2^2$	I I' A
Hai đường tròn cắt nhau: $$R_1^2-R_2^2=\left[d_{I,AB}\right]^2-\left[d_{I',AB}\right]^2$$ Phương trình trục đẳng phương (Đường thẳng AB): $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-(x-a_2)^2-(y-b_2)^2=R_1^2-R_2^2$	A H I I' B

10. MỐI QUAN HỆ 16: TIẾP TUYẾN VÀ CÁT TUYẾN

Tính chất 1: $D_{O\to(AB)}.D_{M\to(AB)}=\frac{AB^2}{4}$ Tính chất 2: $\frac{1}{OM^2-R^2}+\frac{1}{R^2}=\frac{4}{AB^2}$ Tính chất 3: $D_{O\to(AB)}.OM=R^2$ Tính chất 4: $\sin\frac{AMB}{2}=\frac{R}{OM}$ Tính chất 5: $S_{\Delta AMB}=\frac{AB.D_{M\to(AB)}}{2}$	A M H O B
Tính chất 6: $\mathbf{R}^2=\frac{\mathbf{AB}^2}{4}+\left(\mathbf{D}_{\mathbf{O}\to\mathbf{d}}\right)^2$ Tính chất 7: $\mathbf{EA.EB}=\mathbf{OE}^2-\mathbf{R}^2$	C B M A E d O